BTS 2023
Correction épreuve de mathématiques – groupement B

EXERCICE 1.

Partie A.

1. f est solution de l'équation différentielle $(E_0)\colon y'' + 5y' + 4y = 0$
   a. Pour résoudre l'équation, $r^2 + 5r + 4 = 0$, on calcule le discriminant :
   $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9 > 0$
   On a donc deux solutions : $r_1 = \frac{-5-\sqrt{9}}{2\times 1} = -\frac{8}{2} = \mathbf{-4}$ et $r_2 = \frac{-5+\sqrt{9}}{2\times 1} = -\frac{2}{2} = \mathbf{-1}$
   b. La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :
   $\boldsymbol{y(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t}}$ avec C_1 et C_2 des constantes réelles.
2. À $t = 0$, le point M est à 20 cm du point O et se déplace avec une vitesse négative de $-10\ cm.s^{-1}$.
   a. D'après les données, on a $\boldsymbol{f(0) = 20}$ et $\boldsymbol{f'(0) = -10.}$
   b. $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$
   Donc $\boldsymbol{f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}}$
   c. $\boldsymbol{f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-4\times 4} \approx 0,43}$ qui est inférieur à 0,5 cm.
   La distance diminue avec le temps (au début, elle vaut 20 cm).
   Donc le constructeur a raison, le tiroir est bien fermé **avant 4 secondes.**

Partie B.

1. $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$
   a. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-4t} = 0$, on a, par opérations, $\boldsymbol{\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0.}$
   b. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$, **l'axe des abscisses** (la droite d'équation $y = 0$) est asymptote horizontale à la courbe C.
2.
   a. $f'(t) = \frac{70}{3} \times (-1)e^{-t} - \frac{10}{3} \times (-4)e^{-4t}$ soit $\boldsymbol{f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}}$
   b. $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = \frac{60}{3} = 20$. Comme $f'(t) < 0$, la fonction f est strictement décroissante.

x	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
f	$20 \searrow$	0

3. $p = 0{,}1$ et $s = 0{,}5$

   a.

Ligne	t	Valeur de $f(t)$ arrondie à 10^{-2}	Condition (70/3)*e^(-t)-(10/3)*e^(-4t)>s
Ligne 36	3,6	0,64	VRAIE
Ligne 37	3,7	0,58	VRAIE
Ligne 38	3,8	0,52	VRAIE
Ligne 39	3,9	0,47	FAUSSE

   b. La variable t vaut **3,9** à la fin de l'exécution de l'algorithme.
   Ceci signifie qu'au bout de **3,9 secondes**, la distance entre le tiroir et le fond est inférieure à 0,5 cm, donc que l'on peut considérer que **le tiroir est fermé.**
   (*On peut remarquer que cela confirme la réponse à la question 2c de la partie A.*)

4. T est la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

   a. L'équation de la tangente T correspond au développement limité à l'ordre 1.
   Donc l'équation est $\boldsymbol{y = 20 - 10t}$.

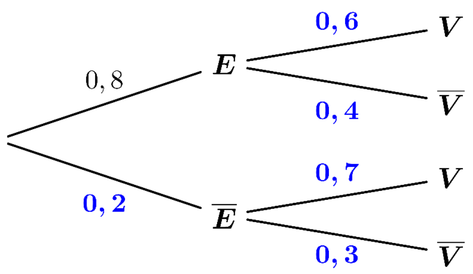
   b. La réponse est la première : $\boldsymbol{20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)}$ **avec** $\boldsymbol{\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0}$.

   c. **La courbe est en-dessous de la tangente T** (car le coefficient de t^2 est négatif).

EXERCICE 2.

Partie A.

1.



2. $\boldsymbol{P(E \cap V) = P(E) \times P_E(V) = 0,8 \times 0,6 = 0,48}$
3. D'après la formule des probabilités totales, on a :
   $\boldsymbol{P(V) = P(E \cap V) + P(\overline{E} \cap V) = 0,48 + 0,2 \times 0,7 = 0,48 + 0,14 = 0,62}$
4. On détermine $\boldsymbol{P_V(E) = \frac{P(E \cap V)}{P(V)} = \frac{0,48}{0,62} \approx 0,774}$

Partie B.

1. X compte le nombre de réparations qui ont duré moins d'une heure parmi un échantillon de 80 vélos réparés. Dans 62% des cas, la réparation dure moins d'une heure.
   Donc **X suit une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,62$.**
2. $\boldsymbol{P(X = 40) = \binom{80}{40} \times 0,62^{40} \times (1 - 0,62)^{40} \approx 0,008}$

3. Si le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de réparation est strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure, il faut qu'il y ait donc au minimum 41 vélos dont la réparation dure moins d'une heure. On cherche donc $\boldsymbol{P(X \geq 41) = 1 - P(X \leq 40) \approx 0,981}$

Partie C.

1. $\boldsymbol{f = \frac{54}{90} = 0,6}$ est une estimation de la proportion p des clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.
2. Intervalle de confiance à 95% : $\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} ; f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$
   a. $\boldsymbol{\left[0,6 - 1,96\sqrt{\frac{0{,}6(1-0{,}6)}{90}} ; 0,6 + 1,96\sqrt{\frac{0{,}6(1-0{,}6)}{90}}\right] \approx [0,498; 0,702]}$
   b. Non, c'est un intervalle de confiance à 95%, **il y a donc 5% d'erreurs**.